模块三 数列拔高题型

第 1 节 奇偶数列问题—求和篇（★★★☆）

强化训练

1．（2022 • 华侨、港澳台联考 • ★★★）设$\{a_n\}$是首项为 1，公差不为 0 的等差数列，且a_1，a_2，a_6成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n.

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，由题意，$a_1=1$，又a_1，a_2，a_6成等比数列，所以$a_2^2=a_1a_6$，

从而$(1+d)^2=1+5d$，解得：$d=3$或 0（舍去），故$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$.

（2）由题意，$S_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^n a_n$，

（通项涉及$(-1)^n$这一结构，考虑相邻两项组合求前 n 项和，是否恰好分完由 n 的奇偶决定，故讨论）

当 n 为偶数时，$S_n=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{n-1}+a_n)=\dfrac{n}{2}\times 3=\dfrac{3n}{2}$；

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3(n+1)}{2}-(-1)^{n+1}a_{n+1}=\dfrac{3n+3}{2}-(3n+1)=\dfrac{1-3n}{2}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{3n}{2},n\text{为偶数}\\ \dfrac{1-3n}{2},n\text{为奇数}\end{cases}$.

2．（2023 • 新高考 II 卷 • ★★★★）已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6,n\text{为奇数}\\ 2a_n,n\text{为偶数}\end{cases}$，记$S_n$，$T_n$分别为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

解：（1）（给出了两个条件，把它们用a_1和 d 翻译出来，即可建立方程组求解a_1和 d）

设$\{a_n\}$的公差为 d，由题意，$S_4=4a_1+6d=32$ ①，

$T_3=b_1+b_2+b_3=(a_1-6)+2a_2+(a_3-6)$

$=a_1-6+2(a_1+d)+a_1+2d-6=4a_1+4d-12=16$ ②，

由①②解得：$a_1=5$，$d=2$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$.

（2）由（1）可得$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，

（要证结论，还需求 T_n，由于 b_n 按奇偶分段，故求 T_n 也应分奇偶讨论，先考虑 n 为偶数的情形）

当 $n(n>5)$ 为偶数时，$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(a_1-6)+2a_2+(a_3-6)+2a_4+\cdots+(a_{n-1}-6)+2a_n$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-1})-6\times\dfrac{n}{2}+2(a_2+a_4+\cdots+a_n)$ ③，

因为 $a_1,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 和 $a_2,a_4,\cdots,a_n$ 分别也构成等差数列，

所以 $a_1+a_3+\cdots+a_{n-1}=\dfrac{\frac{n}{2}(a_1+a_{n-1})}{2}=\dfrac{n(5+2n+1)}{4}=\dfrac{n^2+3n}{2}$，

$a_2+a_4+\cdots+a_n=\dfrac{\frac{n}{2}(a_2+a_n)}{2}=\dfrac{n(7+2n+3)}{4}=\dfrac{n^2+5n}{2}$，

代入③化简得：$T_n=\dfrac{n^2+3n}{2}-3n+2\times\dfrac{n^2+5n}{2}=\dfrac{3n^2+7n}{2}$，

（要由此证 $T_n>S_n$，可作差比较）

所以 $T_n-S_n=\dfrac{3n^2+7n}{2}-(n^2+4n)=\dfrac{n^2-n}{2}>0$，故 $T_n>S_n$；

（对于 n 为奇数的情形，可以重复上述计算过程，但更简单的做法是补 1 项凑成偶数项，再减掉补的那项）

当 $n(n>5)$ 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3(n+1)^2+7(n+1)}{2}-$

$2a_{n+1}=\dfrac{3(n+1)^2+7(n+1)}{2}-2(2n+5)=\dfrac{3n^2+5n-10}{2}$，

所以 $T_n-S_n=\dfrac{3n^2+5n-10}{2}-(n^2+4n)$

$=\dfrac{n^2-3n-10}{2}=\dfrac{(n+2)(n-5)}{2}>0$，故 $T_n>S_n$；

综上所述，当 $n>5$ 时，总有 $T_n>S_n$.

3．（2020 • 新课标 I 卷（改） • ★★★★）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前 12 项和为 243，求 a_1.

解：（递推公式中涉及 $(-1)^n$ 这一结构，故考虑分奇偶讨论）

当 n 为奇数时，$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$ 即为 $a_{n+2}-a_n=3n-1$，

所以 $a_{n+2}=a_n+3n-1$，

（由此递推式可将 a_3，a_5，a_7，…，a_{11} 全部用 a_1 表示，进而求出前 12 项中奇数项的和）

所以 $a_3=a_1+2$，$a_5=a_3+8=a_1+10$，$a_7=a_5+14=a_1+24$，

$a_9=a_7+20=a_1+44$，$a_{11}=a_9+26=a_1+70$，

故 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}=a_1+(a_1+2)+(a_1+10)+$

$(a_1+24)+(a_1+44)+(a_1+70)=6a_1+150$ ①；

当 n 为偶数时，$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$ 即为 $a_{n+2}+a_n=3n-1$，

（于是求偶数项的和时，可将相邻两项组合）

所以 $a_2+a_4=5$，$a_6+a_8=17$，$a_{10}+a_{12}=29$，

故 $a_2+a_4+\cdots+a_{12}=51$ ②；

由①②可得 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}=6a_1+150+51=6a_1+201$，

由题意，$6a_1+201=243$，解得：$a_1=7$.

4.（2023·T8 联考·★★★★）已知数列$\{\ln a_n\}$是等差数列，记S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，$\{S_n+a_1\}$是等比数列，$a_1=1$.

（1）求a_n；

（2）$b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}$，求数列$\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$的前 10 项和.

解：（1）（条件中涉及$\{a_n\}$的前 n 项和S_n，故先由$\{\ln a_n\}$是等差数列研究$\{a_n\}$的情况）

因为$\{\ln a_n\}$是等差数列，设其公差为 d，则$\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=d$，

所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=e^d$，故$\{a_n\}$是等比数列，其公比为e^d，记$q=e^d$，因为$a_1=1$，所以$a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}$，

（已知a_1，只要求出 q，就可求得a_n，可由$\{S_n+a_1\}$为等比数列，取其前 3 项来建立方程解 q）

$S_1+a_1=2a_1=2$，$S_2+a_1=2a_1+a_2=2+q$，$S_3+a_1=2a_1+a_2+a_3=2+q+q^2$，

因为$\{S_n+a_1\}$是等比数列，所以$(S_2+a_1)^2=(S_1+a_1)(S_3+a_1)$，即$(2+q)^2=2(2+q+q^2)$，结合$q\neq 0$可得$q=2$，

（注意$\{S_n+a_1\}$的前 3 项成等比数列只是$\{S_n+a_1\}$为等比数列的必要条件，故还需检验）

此时$S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，$S_n+a_1=2^n$，满足$\{S_n+a_1\}$是等比数列，所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

（2）由（1）可得$b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}=\log_2 2^{2n-2}+\log_2 2^{2n-1}=2n-2+2n-1=4n-3$，

（数列$\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$中含$(-1)^n$这一结构，故求和时考虑相邻两项组合）

设数列$\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$的前 n 项和为T_n，则$T_{10}=-b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2-\cdots-b_9^2+b_{10}^2$，

（为了分析相邻两项组合后求得的结果，可计算$-b_{2k-1}^2+b_{2k}^2$）

设$c_k=-b_{2k-1}^2+b_{2k}^2$，则$T_{10}=c_1+c_2+\cdots+c_5$ ①，且$c_k=(b_{2k}+b_{2k-1})(b_{2k}-b_{2k-1})=4(b_{2k}+b_{2k-1})$，

（接下来可以进一步计算$b_{2k}+b_{2k-1}$，再求T_{10}，但更简单的做法是直接用$c_k=4(b_{2k}+b_{2k-1})$去算式①）

式①即为$T_{10}=4(b_2+b_1)+4(b_4+b_3)+\cdots+4(b_{10}+b_9)=4(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=4\times\dfrac{10(b_1+b_{10})}{2}=20\times(1+37)=760$.